

Математический анализ

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 2.7

Аннотация

Векторная функция скалярного аргумента, ее предел и производная. Векторная функция постоянной длины.

1 Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Векторной функцией скалярного аргумента называется функция, значениями которой являются векторы, а аргументами - числа.

Обозначение: $\vec{r}(t)$

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

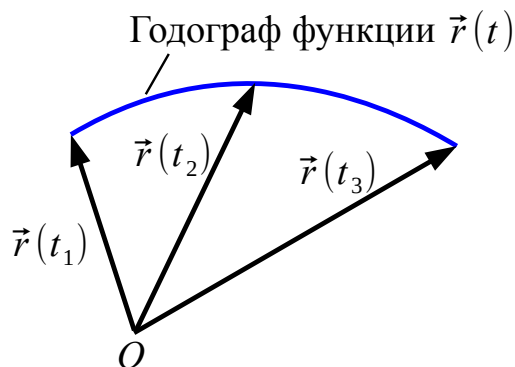
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0 \forall t$, то пишут:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

Определение

Пусть векторы $\vec{r}(t)$ при всех значениях аргумента t приложены к одной точке O . Линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{r}(t)$ при непрерывном изменении t , называется **годографом** функции $\vec{r}(t)$.



Поместим начало декартовой системы координат в точку O . Тогда в этой системе координат годограф задается системой функций:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad - \text{ в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad - \text{ на плоскости,}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты векторной функции $\vec{r}(t)$

2 Предел и непрерывность

Определение

Вектор \vec{a} называется **пределом** векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

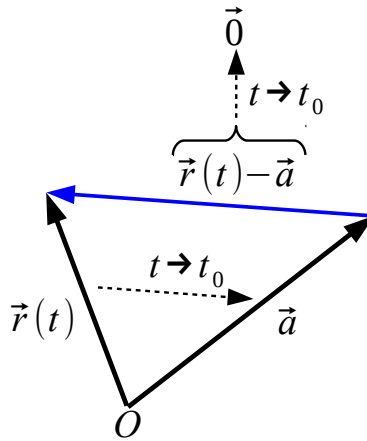
Обозначение:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}.$$

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}.$$

При $t \rightarrow t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор \vec{a} .



Теорема (о пределе в координатной форме)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y \\ \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z \end{cases}$$

Определение

Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Обозначение: $\vec{r}(t) \in C(t_0)$.

Теорема (о непрерывности в координатной форме)

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) \in C(t_0) &\Leftrightarrow \begin{aligned} &x(t) \in C(t_0) \\ &y(t) \in C(t_0) \\ &z(t) \in C(t_0) \end{aligned} \end{aligned}$$

Свойства пределов векторных функций:

- 1) если $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{a}|$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \bar{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t)$,
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$,
- 5) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\bar{r}_1(t) \times \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}_2(t)$

Здесь \cdot - скалярное произведение и \times - векторное произведение.

3 Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\bar{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

Обозначение: $\bar{r}'(t_0)$.

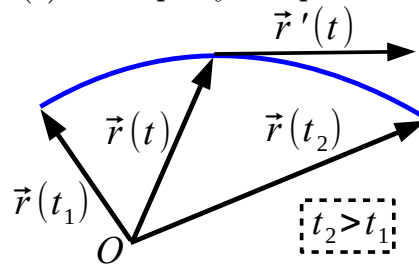
Теорема (о существовании производной векторной функции)

$$\exists \bar{r}'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

причем $\bar{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

Геометрический смысл производной:

Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t .



Так как $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Физический смысл производной:

Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\vec{r}(t)$.

Правила дифференцирования:

- 1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$
- 2) $(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'$
- 3) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2'$
- 4) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2'$

Здесь \cdot - скалярное произведение, \times - векторное произведение, $f = f(t)$ - обычная функция.

4 Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)

Если длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной и $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$.

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O , сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере. На плоскости сфера переходит в круг.